



TITLE:

\mathbf{Q} の有限次Abel拡大体 上定義されたbuilding blockの形式 群 (代数的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

西来路, 文朗

CITATION:

西来路, 文朗. \mathbf{Q} の有限次Abel拡大体上定義されたbuilding blockの形式群 (代
数的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2004, 1376: 171-180

ISSUE DATE:

2004-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25628>

RIGHT:

\mathbf{Q} の有限次 Abel 拡大体上定義された building block の形式群

西来路 文朗

広島国際大学 社会環境科学部

1 序文

\mathbf{Q} 上定義された楕円曲線 E から独立に定義される 2 つの形式群: 極小モデルの形式群 $\hat{E}(x, y)$, l -進表現に付随する L -級数の形式群 $\hat{L}(x, y)$ は, ともに \mathbf{Z} 上定義され, かつ, \mathbf{Z} 上強同型であることが, 本田平氏 [4] により知られている. 本稿では, この本田氏の結果を, building block と呼ばれる代数体上定義されたアーベル多様体に一般化することについて述べる (Th. 4.3). 本田氏の結果の一般化として, Deninger-Nart [1] による GL_2 -type のアーベル多様体への高次元化, 筆者 [10] による 2 次体上の \mathbf{Q} -曲線への定義体に関する一般化が知られているが, 今回得られた結果はこれら 2 つの一般化を含む. 今回の一般化のアイディアは, building block に付随する行列係数の新しい L -級数を定義したことにある (4.2 節).

2 p -進整数環上の形式群

R を可換環とする. x を n 個の変数 x_1, \dots, x_n の組として, 形式的冪級数環 $R[[x_1, \dots, x_n]]$ を $R[[x]]$ と略記する. また, しばしば, x を縦ベクトル ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ とみなす. $f(x), g(x)$ が $R[[x]]$ の元であるとき,

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{\deg r}$$

とは, $f(x) - g(x)$ が全次数 $r - 1$ 次以下の項を含まぬことをいう. $f(x), g(x)$ が $R[[x]]^m$ のとき,

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{\deg r}$$

は, $f(x), g(x)$ の各成分が $\pmod{\deg r}$ で合同であることをいう.

$$R[[x]]_0^m := \{f(x) \in R[[x]]^m \mid f(x) \equiv 0 \pmod{\deg 1}\}$$

とおく.

$R[[x]]_0^n$ の元 $\varphi(x)$ が可逆とは,

$$\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = x$$

を満たす $R[[x]]_0^n$ の元 $\psi(x)$ が存在することをいう. $\varphi(x)$ が可逆であるための必要十分条件は, $\mathrm{GL}_n(R)$ の元 C が存在し,

$$\varphi(x) \equiv Cx \pmod{\deg 2}$$

が成立することである.

x, y, z をそれぞれ n 個の変数の組とする.

定義 2.1. $R[[x, y]]_0^n$ の元 $F(x, y)$ が R 上の n 次元 (可換) 形式群であるとは, 以下を満たすことをいう.

$$(i) \quad F(x, y) \equiv x + y \pmod{\deg 2}$$

$$(ii) \quad F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$$

$$(iii) \quad F(x, y) = F(y, x)$$

例 2.2. $\hat{G}_a^n(x, y) := x + y$ は R 上の形式群である. 加法群と呼ばれる.

$F(x, y), G(x, y)$ を R 上の n 次元形式群とする.

定義 2.3. $R[[x]]_0^n$ の元 $\varphi(x)$ が $F(x, y)$ から $G(x, y)$ への R 上の準同型であるとは,

$$\varphi(F(x, y)) = G(\varphi(x), \varphi(y))$$

を満たすことをいう. さらに, $\varphi(x)$ が可逆なとき, $\varphi(x)$ を弱同型,

$$\varphi(x) \equiv I_n x \pmod{\deg 2}$$

のとき, $\varphi(x)$ を強同型という. ただし, I_n は n 次単位行列とする.

$F(x, y)$ から $G(x, y)$ への R 上の弱同型 (resp. 強同型) が存在することを, $F(x, y)$ と $G(x, y)$ は 弱同型 (resp. 強同型) であるといい, $F \sim_R G$ ($F \approx_R G$) と書く. 関係 \sim_R (resp. \approx_R) は同値関係である.

R を標数 0 の整域, K を R の商体とする.

命題 2.4. K 上の任意の n 次元形式群 $F(x, y)$ に対し, $F(x, y)$ から加法群 $\hat{G}_a^n(x, y)$ への K 上の強同型 $f(x)$ がただひとつ存在する.

R 上定義された形式群 $F(x, y)$ に対し, 命題 2.4 で定まる K 上の強同型 $f(x)$ を $F(x, y)$ の変換子という.

$$F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

が成立する.

K を有限次代数体, \mathcal{O}_K をその整数環とする. \mathfrak{p} を \mathcal{O}_K の素イデアルとし, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$, $K_{\mathfrak{p}}$ で \mathcal{O}_K , K の \mathfrak{p} -進完備化をあらわす. 命題 2.4 より, 次の意味で Hasse の原理が成立する.

命題 2.5. (i) K 上の形式群 $F(x, y)$ が, \mathcal{O}_K 上の形式群であることと, 任意の \mathfrak{p} に対し $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上の形式群であることは同値である.

(ii) \mathcal{O}_K 上の形式群 $F(x, y)$ と $G(x, y)$ が, \mathcal{O}_K で強同型 (*resp.* 弱同型) あることと, 任意の \mathfrak{p} に対し $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上で強同型 (*resp.* 弱同型) であることは同値である.

\mathfrak{p} -進整数環上の形式群について本田 [4] による分類理論が知られている. 簡単の為, \mathfrak{p} が K/\mathbb{Q} において不分岐な場合をまとめる. $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ の極大イデアルをあらためて \mathfrak{p} であらわす. σ を $K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ の Frobenius 自己同型とする.

$F(x, y)$ を $K_{\mathfrak{p}}$ 上の n 次元形式群とし, $f(x)$ をその変換子とする.

定理 2.6 ([4]; Th. 2, Prop. 3.3). \mathfrak{p} が K/\mathbb{Q} において不分岐であると仮定する. このとき, 以下は同値である.

(i) $F(x, y)$ が $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上定義される.

(ii) $M_n(\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}})$ の元 C_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots$) が存在し,

$$(2.1) \quad pf(x) + \sum_{\nu \geq 1} C_{\nu} \sigma^{\nu} f(x^{p^{\nu}}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

を満たす.

合同式 (2.1) が成立するとき, $F(x, y)$ は特殊元 $pI_n + \sum_{\nu \geq 1} C_{\nu} T^{\nu}$ に属するという.

定理 2.7 ([4]; Th. 3, Prop. 3.3). \mathfrak{p} が K/\mathbb{Q} において不分岐であると仮定する. $F(x, y)$ と $G(x, y)$ を $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上定義された形式群とする. このとき, 以下は同値である.

(i) $F(x, y)$ と $G(x, y)$ が $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上で強同型である.

(ii) $F(x, y)$ と $G(x, y)$ が同じ特殊元 $pI_n + \sum_{\nu \geq 1} c_{\nu} T^{\nu}$ に属する.

3 \mathbf{Q} 上定義された楕円曲線の形式群

E を \mathbf{Q} 上の楕円曲線とし, 極小モデルを

$$Y^2 + A_1XY + A_3Y = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6 \quad (A_i \in \mathbf{Z})$$

とおく. E の不変微分 $w_E := dX/(2Y + A_1X + A_3)$ を零点における局所変数 $z := -X/Y$ で展開し,

$$w_E = \sum_{n \geq 1} b_n z^n \frac{dz}{z}$$

とおく. 各 b_n は \mathbf{Z} の元であり, $b_1 = 1$ となる ([12]; p.113). E の形式群を

$$\hat{E}(x, y) := f^{-1}(f(x) + f(y)), \quad f(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n} x^n$$

により定義する. $\hat{E}(x, y)$ は \mathbf{Z} 上の形式群になる ([12]; p.115).

$$L(E/\mathbf{Q}, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$$

を $G_{\mathbf{Q}}$ の E 上の l -進表現に付随する L -級数とする. 各 a_n は, l のとり方によらず, \mathbf{Z} の元であり, $a_1 = 1$ となる. $L(E/\mathbf{Q}, s)$ の形式群を

$$\hat{L}(x, y) := g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad g(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} x^n$$

により定義する.

このとき, 次が成立する.

定理 3.1 ([4]; Th. 9). $\hat{L}(x, y)$ は \mathbf{Z} 上定義された形式群であり, かつ, $\hat{L}(x, y)$ と $\hat{E}(x, y)$ とは \mathbf{Z} 上強同型である.

$\varphi(x)$ を $\hat{L}(x, y)$ から $\hat{E}(x, y)$ への \mathbf{Z} 上の強同型とおく. $z = \varphi(q)$ において変数変換するとき,

$$w_E = \sum_{n \geq 1} b_n z^n \frac{dz}{z} = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \frac{dq}{q}$$

が成立する.

定理 3.1 の証明は, 任意の素数 p に対して, $\hat{L}(x, y)$, $\hat{E}(x, y)$ が \mathbf{Q}_p 上で, ともに特殊元 $p - a_p T + \varepsilon_p T^2$ に属することにより得られる. ただし, ε_p を p が E の good prime であるかどうかに応じて, 1 または 0 と定める.

系として次が成立する.

系 3.2. 任意の素数 p に対して, $a_p \equiv b_p \pmod{p}$ が成立する.

Weil の不等式 $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ と系 3.2 とにより, $p \geq 17$ ならば

$$a_p = b_p \text{ の } p \text{ を法とする絶対値最小の剰余}$$

が成立する.

4 \mathbb{Q} の Abel 拡大体上定義された building block

4.1 building block の定義

\mathbb{Q} 上定義された g 次元 Abel 多様体 A が, GL_2 -type であるとは, A の \mathbb{Q} 上定義された自己準同型のなす \mathbb{Q} -algebra $\text{End}_{\mathbb{Q}}^0(A)$ が g 次元代数体と同型であることをいう. 代数体 K 上定義された Abel 多様体が, K 上 **modular** とは, ある N について modular 多様体 $J_1(N)$ の K -simple factor と K 上同種であることをいう. \mathbb{Q} 上 modular な Abel 多様体は GL_2 -type である. また, 一般化された Taniyama-Shimura 予想により, GL_2 -type の Abel 多様体は \mathbb{Q} 上 modular であると予想されている.

定義 4.1. $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された g 次元 Abel 多様体 B が **building block** とは, B が以下の 2 条件を満たすことをいう.

- (i) \mathbb{Q} の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の任意の元 τ に対し, $\text{End}(B)$ と可換な同種写像 $\phi_{\tau}: {}^{\tau}B \rightarrow B$ が存在する. ここで, ϕ_{τ} が $\text{End}(B)$ と可換であるとは, $\text{End}(B)$ の任意の元 φ に対し, $\phi_{\tau}^{\tau}\varphi = \varphi\phi_{\tau}$ を満たすことをいう.
- (ii) $\text{End}(B)$ が総実代数体 F 上の Schur 指数 t の central division algebra に同型であり, $t = 1, 2$, かつ, $t[F: \mathbb{Q}] = g$ が成立する.

更に, ある有限次 Galois 拡大 K が存在し, Abel 多様体 B , 任意の B の自己準同型が K 上定義され, 各 τ に対し K 上定義された ϕ_{τ} がとれるとき, building block B は K 上定義されるという.

以下, 同型写像をひとつ固定することにより, 総実代数体 F と $\text{End}(B)$ の中心を同一視する.

$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された Abel 多様体 B が building block であることと, CM 型の部分多様体を持たない GL_2 -type の Abel 多様体の $\overline{\mathbb{Q}}$ -simple factor と同種であることは同値である ([9]; Prop. 5.2, [6]; Prop. 4.5). よって, 一般化された Taniyama-Shimura 予想により, building block は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で modular であると予想されている.

次節以降の議論の為, 同種写像 ϕ_{τ} の次数 $\delta(\phi_{\tau})$ を定義する.

B を building block とする. B の偏極 θ を固定する. このとき, 任意の $G_{\mathbf{Q}}$ の元 τ に対し, ${}^{\tau}\theta$ は ${}^{\tau}B$ の偏極である. $\text{End}(B)$ と可換な同種写像 ϕ_{τ} に対し,

$$\delta(\phi_{\tau}) := \phi_{\tau} {}^{\tau}\theta^{-1} \hat{\phi}_{\tau} \theta$$

とおく. ただし, $\hat{\phi}_{\tau}$ は ϕ_{τ} の transpose isogeny をあらわす. $\delta(\phi_{\tau})$ は, 偏極 θ の取り方によらず, $\text{End}^0(B)$ の中心 F の元である. また, $\delta(\phi_{\tau})$ の $\text{End}^0(B)/\mathbf{Q}$ の被約ノルムは, 次数 $\deg \phi_{\tau}$ に等しい ([6]; Prop. 5.4, 5.5).

4.2 building block の L-級数

K を \mathbf{Q} の有限次 Abel 拡大体, \mathcal{O}_K を整数環, G をその Galois 群とする. B を K 上定義された building block とする. G の各元 τ に対して, $\text{End}(B)$ の元と可換な同種写像 $\phi_{\tau}: {}^{\tau}B \rightarrow B$ をひとつずつ固定する. このとき, building block B には 2-cocycle

$$c: G \times G \rightarrow F^*: (\tau_1, \tau_2) \mapsto \phi_{\tau_1} {}^{\tau_1}\phi_{\tau_2} \phi_{\tau_1\tau_2}^{-1}$$

が付随する. 同種写像 ϕ_{τ} が $\text{End}(B)$ の元と可換であることから, $c(\tau_1, \tau_2)$ は中心 F の元になる. 以下, 次を仮定する.

(C) 2-cocycle c は symmetric である. すなわち, G の任意の元 τ_1, τ_2 に対し, $c(\tau_1, \tau_2) = c(\tau_2, \tau_1)$ が成立する.

$g=1$ のとき, \mathbf{Q} の有限次 Abel 拡大体上定義された building block で, B と $\overline{\mathbf{Q}}$ 上同種, かつ, 仮定 (C) を満たすものがとれる ([7]; Cor. 4.2).

素数の有限集合 S を, 以下の条件を満たすようにとる.

(S1) $\mathcal{O}_{K,S} := \mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Z}_S$ は単項イデアル整域である. ただし, \mathbf{Z}_S は \mathbf{Q} における S -整数のなす環である.

(S2) S は判別式 D_K , 指数 $[\mathcal{O}_F: \text{End}^0(B) \cap \mathcal{O}_F]$, d_{τ} を割る素数をすべて含む. ここで, d_{τ} は $\text{End}(B)$ と可換な同種写像 $\varphi: {}^{\tau}B \rightarrow B$ の次数 $\deg \varphi$ の最大公約数をあらわす.

(S3) \mathcal{O}_K の p を割るある素イデアル \mathfrak{p} が, B の good prime でも multiplicative prime でなければ, p は S に属する.

B を B の \mathcal{O}_K 上の Néron モデルとする. 条件 (S1) より, 不変微分のなす $\mathcal{O}_{K,S}$ -加群 $\omega_{B/\mathcal{O}_{K,S}}$ は階数 g の自由加群となるので, その基底 $\{w_i\}_{i=1}^g$ を固定する. このとき, B の zero section での formal completion は, $\mathcal{O}_{K,S}$ 上の

形式群 $\hat{B}_S(x, y)$ を定める. $\text{Hom}_K^0({}^\tau B, B)$ の元 φ に対し, $M_g(K)$ の元 $R(\varphi)$ を

$$\varphi^{*t}(w_1, \dots, w_g) = R(\varphi)^t({}^\tau w_1, \dots, {}^\tau w_g)$$

により定義する. φ^* は引き戻し写像である.

K 上定義された building block B の L -級数

$$L(B/K, s) = \sum_{n \geq 1} A_n n^{-s},$$

を以下のように定義する.

$n = 1$ のとき, $A_1 := I_g$ と定める.

n が素数 p のとき, 行列 A_p を, p が判別式 D_K を割るかどうかに応じて,

$$A_p := \frac{1}{t} R\left(\frac{\text{tr}_{F_\lambda}(\phi_\sigma \sigma | V_\lambda(B)^I)}{\delta(\phi_\sigma)}\right) R(\phi_\sigma) \quad \text{または} \quad 0,$$

と定める. また, p が D_K と素な good prime であるかどうかに応じて,

$$X_p := R\left(\frac{c(\sigma, \sigma)}{\delta(\phi_\sigma)}\right) R(\phi_{\sigma^2}) \quad \text{または} \quad 0,$$

とおく. ここで, λ は F の素イデアル, $V_\lambda(B)$ は B の λ -進 Tate module, σ は p の prime divisor \mathfrak{P} に対する $G_{\mathbf{Q}}$ における Frobenius 自己同型, I は \mathfrak{P} の惰性群である. 行列 A_p と X_p は, ϕ_τ , λ , σ のとり方によらず, $M_g(\mathcal{O}_{K,S})$ の元となる.

G における p の Frobenius 自己準同型を σ_p とおき, 自然数 m に対し, σ_m を, 関係式 $\sigma_{m_1 m_2} = \sigma_{m_1} \sigma_{m_2}$ により定める. この記号の下, n が素数冪 p^ν のときは, 漸化式

$$A_{p^\nu} = A_p^{\sigma_p} A_{p^{\nu-1}} - p X_p^{\sigma_{p^2}} A_{p^{\nu-2}} \quad (\nu \geq 2)$$

により A_{p^ν} を定める. 一般の自然数 n に対しては, 行列 A_n を関係式

$$A_{n_1 n_2} = A_{n_1}^{\sigma_{n_1}} A_{n_2} \quad ((n_1, n_2) = 1)$$

で定める.

$L(B/K, s)$ が well-defined であることは次のような方針で示される.

仮定 (C) により, $\beta: G \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}^*$ が存在し,

$$c(\tau_1, \tau_2) = \beta(\tau_1) \beta(\tau_2) \beta(\tau_1 \tau_2)^{-1} \quad (\forall \tau_1, \tau_2 \in G)$$

を満たす. E を F に $\beta(\tau)$ の値を添加して得られる体とする. $d := [E: F]$ とおく. E/F の基底をとり, E から $\text{End}_K^0(B^d)$ の中への同型を固定する. Pyle

により, (B, β) に対し, $\text{End}_{\mathbf{Q}}^0(A) = E$ なる GL_2 -type の Abel 多様体 A と, E の作用と可換な K 上定義された同種写像 $\kappa: B^d \rightarrow A^t$ が存在し,

$$\begin{array}{ccc} A^t & \xrightarrow{\Pi\beta(\tau)} & A^t \\ \uparrow \tau_\kappa & & \uparrow \kappa \\ \tau B^d & \xrightarrow{\Pi\phi_\tau} & B^d \end{array}$$

を満たす ([6]; Prop. 4.2-4.5). A は \mathbf{Q} 上の E の作用と可換な同種を除き一意的に定まる.

$$L(A/\mathbf{Q}, E, s) = \prod_{p \nmid D_K} L_p(p^{-s})^{-1} = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$$

を A の λ -進表現に付随する L -級数とする. (F の素イデアル λ の上にある E の素イデアルをあらためて λ とあらわす.) a_n は λ のとり方によらず, \mathcal{O}_E の元となる. また, $a_n \beta(\sigma_n)$ は \mathcal{O}_F の元となる.

命題 4.2. 任意の n に対し, $A_n = R(a_n \beta(\sigma_n) / \delta(\phi_{\sigma_n})) R(\phi_{\sigma_n})$ が成立する. 特に, L -級数 $L(B/K, s)$ は *well-defined* であり, $M_g(\mathcal{O}_{K,S})$ -係数である.

4.3 building block の形式群

前節で定義した L -級数 $L(B/K, s)$ に対し, L -級数 $L(B/K, s)$ の形式群 $\hat{L}(x, y)$ を

$$\hat{L}(x, y) := g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad g(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n} x^n$$

により定義する. ただし, $x^n := {}^t(x_1^n, \dots, x_g^n)$ とおく.

定理 4.3. 2-cocycle c が *symmetric* であると仮定する. このとき, $\hat{L}(x, y)$ は $\mathcal{O}_{K,S}$ 上定義され, かつ, $\hat{L}(x, y)$ と $\hat{B}_S(x, y)$ とは $\mathcal{O}_{K,S}$ 上強同型である.

定理 4.3 の証明は, S に属する素数 p を割らない素イデアル \mathfrak{p} に対して, $\hat{L}(x, y), \hat{B}_S(x, y)$ が $K_{\mathfrak{p}}$ 上で, ともに特殊元 $pI_g - A_{\mathfrak{p}}T + X_{\mathfrak{p}}T^2$ に属することにより得られる.

$g = 1, K = \mathbf{Q}$ のとき, B は \mathbf{Q} 上の楕円曲線となり,

$$L(B/K, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$$

は B の l -進表現に付随する L -級数となる. この場合が Honda [4] の結果である. また, $K = \mathbf{Q}, t = 1$ のとき, B は GL_2 -type の Abel 多様体, $A = B$ となり,

$$L(B/K, s) = \sum_{n \geq 1} R(a_n) n^{-s}$$

は B の λ -進表現に付随する行列係数の L -級数となる. この場合は, Deninger-Nart [1] の結果である. $g = 1$, K が 2 次体のとき, B は \mathbf{Q} -曲線, A は B の K から \mathbf{Q} への Weil restriction となり,

$$L(B/K, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \beta(\sigma_n) R(\phi_{\sigma_n})}{\delta(\phi_{\sigma_n})} n^{-s}$$

は A に付随する λ -進表現の L -級数 $L(A/\mathbf{Q}, E, s)$ の \mathbf{Q} -共役な L -級数の一次結合となる. この場合は, 筆者 [10] の結果である.

References

- [1] C. Deninger and E. Nart, *Formal groups and L-series*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 318-333.
- [2] Y. Hasegawa, *\mathbf{Q} -curves over quadratic fields*, Manuscripta Math. **94** (1997), 347-364.
- [3] T. Honda, *Formal groups and zeta-functions*, Osaka J. Math. **5** (1968), 199-213.
- [4] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 213-246.
- [5] G. Karpilovsky, *Group representations*, Vol. 2 (Elsevier, Amsterdam, 1993).
- [6] E. E. Pyle, *Abelian varieties over \mathbf{Q} with large endomorphism algebras and their simple components over $\overline{\mathbf{Q}}$* . In J. Cremona, J.C. Lario, J. Quer and K. Ribet (ed.): *Modular curves and abelian varieties*, 189-239, Progress in Mathematics **224**, Birkhäuser, 2004.
- [7] J. Quer, *\mathbf{Q} -curves and abelian varieties of GL_2 -type*, Proc. London Math. Soc. **81** (2000), 285-317.
- [8] J. Quer, *Fields of definition of \mathbf{Q} -curves*, Journal de Théorie Nombres de Bordeaux **55** (2001), 275-285.
- [9] K. A. Ribet, *Abelian varieties over \mathbf{Q} and modular forms*, In J. Cremona, J.C. Lario, J. Quer and K. Ribet (ed.): *Modular curves and abelian varieties*, 240-261, Progress in Mathematics **224**, Birkhäuser, 2004.
- [10] F. Sairaiji, *Formal groups of certain \mathbf{Q} -curves over quadratic fields*, Osaka J. Math. **39** (2002), 223-243.

- [11] F. Sairaiji, *Formal groups of building blocks completely defined over finite abelian extensions of \mathbf{Q}* , preprint.
- [12] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic curves*, Springer G.T.M. 106.

Fumio SAIRAIJI,
Hiroshima International University,
Hiro, Hiroshima 737-0112, Japan.
e-mail address: sairaiji@it.hirokoku-u.ac.jp